Aula 12

Continuidade de Funções Complexas

Definição (Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que f **é contínua no ponto** $z_0 \in D_f$ se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} : z \in B_\varepsilon(z_0) \cap D_f \Rightarrow f(z) \in B_\delta(f(z_0))$$

ou

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} \forall_{z\in D_f} : |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \delta$$

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Então, f é contínua em $z_0 \in D_f$ se, qualquer que seja a vizinhança aberta A de $f(z_0)$, existe uma vizinhança aberta V_{z_0} de z_0 tal que

$$f(V_{z_0} \cap D_f) \subset A.$$

Mais geralmente, f é contínua em todos os pontos do seu domínio D_f se a pré-imagem $f^{-1}(A)$ de qualquer aberto A é a intersecção dum aberto O com o domínio

$$f^{-1}(A) = O \cap D_f.$$

Compacidade

Definição: Diz-se que um conjunto K é **compacto** se, qualquer que seja a cobertura de K por abertos

$$K \subset \cup_\alpha A_\alpha,$$

é possível reter apenas um número finito desses abertos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ que ainda cobrem K (diz-se uma subcobertura finita)

$$K \subset \cup_1^m A_j.$$

Teorema (Heine-Borel): Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado. Isso é verdade em particular para subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, isométrico a $\mathbb{R}^2$.

Teorema: Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos de K, então $f(K)$ é compacto.

Corolário (Teorema de Weierstrass): Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de K, então f tem máximo e mínimo.

Continuidade Uniforme

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que f **é uniformemente contínua em** D_f se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} \forall_{z,w\in D_f} : |z-w| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \delta$$

Teorema (Heine-Cantor): Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto e $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos de K, então f é uniformemente contínua em K.

Limites de Funções Complexas

Definição (Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Diz-se que o **limite da função** f **quando** z **tende para** z_0 **é** $L \in \mathbb{C}$, e escreve-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} : z \in B_\varepsilon(z_0) \cap D_f \Rightarrow f(z) \in B_\delta(L).$$

No caso de z_0 ou L serem infinitos, usam-se exteriores de bolas centradas na origem como vizinhanças de ∞, na definição anterior.

Definição (Heine): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Diz-se que o **limite da função** f **quando** z **tende para** z_0 **é** $L \in \mathbb{C}$, e escreve-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

se satisfaz a condição

$$\forall_{\{z_n\} \subset D_f} : z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to L$$

Teorema: As definições de limite à Heine e à Cauchy são equivalentes e as mesmas que em $\mathbb{R}^2$. Quando existe, o limite é único.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto do domínio de f, $z_0 \in D_f$. Então o limite $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ existe se e só se f é contínua em z_0 e $L = f(z_0)$.

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

e $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Então,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L = a + ib,$$

se e só se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

no sentido de $\mathbb{R}^2$.

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \overline{D_f} \cap \overline{D_g}$. Então, se existem os limites $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ e $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$, existem também

- $\lim_{z\to z_0} f \pm g = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{z\to z_0} f \cdot g = L_1 \cdot L_2$
- $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f}{g} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0)$,

com os cuidados devidos para as situações de limites infinitos e possíveis indeterminações.

Diferenciabilidade Complexa

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int} D_f$. Diz-se que f **é diferenciável, ou tem derivada, no sentido complexo em** z_0 se existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Quando este limite existe o seu valor designa-se por $f'(z_0)$ ou $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Diz-se que f **é holomorfa, ou analítica num ponto** z_0 se f for diferenciável em todos os pontos duma bola centrada em z_0.

Diz-se que f **é inteira** se $D_f = \mathbb{C}$ e se f é diferenciável em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$.